Modellierung der Werttheorie

cx

13. Oktober 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Werttheorie und Modelle

In vielen Beiträgen zur Werttheorie und dem Transformationsproblem werden ähnliche Modellrechnungen verwendet, um die Werte von produzierten Waren zu ermitteln.
Zum Beispiel gibt Klaus Müller in dem Artikel „Welche Arbeitszeit ist gesellschaftlich notwendig?" ein Modell zur Ermittlung der vollen Arbeitszeit an.
Quelle:
`https://www.zeitschrift-marxistische-erneuerung.de/de/article/1252.welche-arbeitszeit-ist-gese`
`html` (steht dort auch als PDF-Version zum Download zur Verfügung)
Dieser Text setzt sich mit dieser grundsätzlichen Art der Modellbildung (Basismodell) auseinander.

1.1 Werttheorie

Ökonomisch möglich und empirisch nachweisbar ist folgende Tatsache:
Die Beschäftigten eines Wirtschaftssystems produzieren aus einem Input, das sind Waren (Vorprodukten) - wie z.B. Teigmaschinen, Mehl, usw. - und ihrer Arbeitszeit einen Output (Waren).

Die Werttheorie besagt Folgendes:
Das Maß des Wertes einer Ware wird durch die Menge der gesamten Arbeitszeit bestimmt, die zu ihrer Herstellung benötigt wurde.
Diese gesamte Arbeitszeit setzt sich aus der direkten Arbeitszeit der Beschäftigten und dem indirekten Arbeitszeitaufwand - das ist die Arbeitszeit, die für die Herstellung des Wareninputs benötigt wird - zusammen.
Wenn man also die Zeit kennt, die für die Herstellung einer Mengeneinheit jedes Vorprodukts benötigt wird und dies mit der Menge des Vorprodukts multipliziert kennt man die Gesamtzeit zur Herstellung dieses Vorprodukts.
Die Gesamtarbeitszeit für die Produktion des Outputs ist also die Summe der Herstellungszeiten der Vorprodukte und der direkten Arbeitszeit, die die Beschäftigen benötigen um aus diesen Vorprodukten den Output (das Endprodukt) zu produzieren.

1.2 Modelle der Werttheorie

Diese o.g. intuitive Vorstellung wollen manche Werttheoretiker nun durch ein geeignetes Modell widergespiegeln und abbilden.

Alle folgenden Beispiele (Modelle) simulieren eine Volkswirtschaft, die aus 3 Sektoren besteht.
Aus einem Input (Beschäftigte und Vorprodukte in Form von Waren) wird ein Output (hier: eine Ware) erzeugt:
Die Beschäftigten (sofern das Modell keine Roboterwirtschaft nachahmt) der 3 Sektoren benötigen jeweils die (direkten) Arbeitszeiten A1, A2, A3, um i.A. aus 3 Waren (z.B. Teigmaschinen, Mehl und Brot (um die Existenz der Beschäftigten zu sichern) eine bestimmte Ware (z.B. Brot) zu produzieren.
Im 1. Sektor werden aus den Waren W1, W2, W3 und der direkten Arbeitszeit A1 der Beschäftigten die Ware W1 hergestellt.
Im 2. Sektor werden aus den Waren W1, W2, W3 und der direkten Arbeitszeit A2 der Beschäftigten die Ware W2 hergestellt.
Im 3. Sektor werden aus den Waren W1, W2, W3 und der direkten Arbeitszeit A3 der Beschäftigten die

Ware W3 hergestellt.

Kurz:
A1 und W1 und W2 und W3 $\longrightarrow$ W1
A2 und W1 und W2 und W3 $\longrightarrow$ W2
A3 und W1 und W2 und W3 $\longrightarrow$ W3

Beispiel:
Für die Herstellung einer Teigmaschine braucht man 10 Stunden.
Dann braucht man für die Herstellung von 20 Teigmaschinen $20 \cdot 10 = 200$ Stunden.

Wenn man die Herstellungszeiten für je eine Mengeneinheit der Waren W1, W2, W3 nicht kennt, bezeichnet man sie einfach als x,y,z, wobei diese Werte jeweils größer 0 sein müssen, sonst macht es ökonomisch keinen Sinn.

Dann kann man die Herstellungszeiten der Waren wie folgt angeben:
A1 + Menge W1 $\cdot$ x + Menge W2 $\cdot$ y + Menge W3 $\cdot$ z = neu produzierte Menge W1 $\cdot$ x
A2 + Menge W1 $\cdot$ x + Menge W2 $\cdot$ y + Menge W3 $\cdot$ z = neu produzierte Menge W2 $\cdot$ y
A3 + Menge W1 $\cdot$ x + Menge W2 $\cdot$ y + Menge W3 $\cdot$ z = neu produzierte Menge W3 $\cdot$ z

Im folgenden werden verschiedene Versionen dieses Basismodells vorgestellt, die sich nur in bestimmten Punkten unterscheiden, wie z.B.
1) direkte Arbeitszeit = 0 (nur zum Experimentieren, da ökonomisch nicht sinnvoll)
2) Produktion von Luxusgütern: Luxusgüter werden nicht zur Produktion von Waren benötigt.
Falls W3 Luxusgut bedeutet das z.B.:
A1 + Menge W1 $\cdot$ x + Menge W2 $\cdot$ y = neu produzierte Menge W1 $\cdot$ x
3) usw. (siehe Beispiele unten)

Bemerkung:
Um den Leser nicht zu verschrecken werden in den folgenden Beispielen die Berechnungen nicht explizit angegeben.
Wer sich trotzdem dafür interessiert, kann dann im mathematischen Anhang (letztes Kapitel) die gerechneten Beispiele anschauen.
Nützlich dazu ist das Online-Tool von Wolfram Alpha
Außerdem wird auch die (nicht triviale) Mathematik (Lemmata und Sätze mit Beweisen) hinter diesen Modellversionen vorgestellt.

2 Versionen des Basismodells

Wichtige Bemerkungen:
1) Alle in den folgenden Beispielen verwendeteten Warenmengen sind jeweils größer 0.
2) Bei allen Berechnungen der Arbeitszeiten werden nur ökonomisch sinnvolle Zeiten > 0 als Lösung gewertet.

2.1 Modellversion M1 : Mißwirtschaft ohne direkte Arbeitszeiten

2.1.1 Modellannahmen

1) Die direkten Arbeitszeiten A1, A2, A3 sind jeweils 0.
Eine bis jetzt in der Realität unrealistische Annahme, bei der statt der Beschäftigten nur Roboter aus den Vorprodukten das Endprodukt herstellen.
2) Warum Mißwirtschaft: siehe unten

2.1.2 Beispiel

In Klammern sind die jeweiligen Mengen der Waren angegeben:
W1(=50) und W2(=5) und W3(=15) $\longrightarrow$ W3(=70)
W1(=13) und W2(=15) und W3(=9) $\longrightarrow$ W3(=34)
W1(=10) und W2(=8) und W3(=40) $\longrightarrow$ W3(=60)

Das gibt dann das folgende LGS (lineares Gleichungssystem):
$50\ x + 5\ y + 15\ z = 70\ x$
$13\ x + 15\ y + 9\ z = 34\ y$
$10\ x + 8\ y + 40\ z = 60\ z$

2.1.2.1 Lösung

Es gibt unendlich viele positive ($x > 0, y > 0, z > 0$) Lösungen.

2.1.3 Warum Mißwirtschaft

Der Input der Mengen der Waren W1 (=50 + 13 + 10 = 73) ist größer als der Output der Ware W1 (=70).
Der Input der Mengen der Waren W3 (=15 + 9 + 40 = 64) ist größer als der Output der Ware W3 (=60).

2.1.4 Empfindlichkeitsanalyse

Ändert sich nur eine Warenmenge minimal, gibt es keine Lösung mehr:

2.1.4.1 Beispiel

$50\ x + 5\ y + 15,01 z = 70\ x$
$13\ x + 15\ y + 9\ z = 34\ y$
$10\ x + 8\ y + 40\ z = 60\ z$

Lösung:
Es gibt keine Lösung (x=y=z=0 ist ökonomisch nicht sinnvoll).

2.1.5 Modellanalyse

Da die direkten Arbeitszeiten 0 sind, bildet diese Modellversion die Realität nicht ab.

2.2 Modellversion M2: Mißwirtschaft (mit direkten Arbeitszeiten)

2.2.1 Modellannahmen

1) Die direkten Arbeitszeiten A1, A2, A3 sind alle größer 0.
2) In dieser Modellversion gibt es keine Luxusgüter, denn alle produzierten Waren werden wieder verwendet um neue Produkte herzustellen. Auch Konsumgüter werden dazu benutzt Waren herzustellen, denn diese werden von den Beschäftigten benötigt (z.B. in Form von Lebensmittel), ihre Arbeitskraft zu erhalten.
3) Warum Mißwirtschaft: siehe letzte Modellversion.

2.2.2 konkretes Beispiel

Wir nehmen irgendwelche festen direkten Arbeitszeiten an, wie z.B:
A1: 123, A2:456, A3: 789 und Warenmengen an:
W1: 50 Mengeneinheiten als Vorprodukt im Sektor 1,
W2: 5 Mengeneinheiten als Vorprodukt im Sektor 1, usw.
Das ergibt dann:
123 Zeiteinheiten und W1(=50) und W2(=5) und W3(=15) $\longrightarrow$ W3(=70)
456 Zeiteinheiten und W1(=13) und W2(=15) und W3(=9) $\longrightarrow$ W3(=34)
789 Zeiteinheiten und W1(=10) und W2(=8) und W3(=40) $\longrightarrow$ W3(=60)

Das gibt dann das folgende LGS (lineares Gleichungssystem):

$123 + 50\,x + 5\,y + 15\,z = 70\,x$
$456 + 13\,x + 15\,y + 9\,z = 34\,y$
$789 + 10\,x + 8\,y + 40\,z = 60\,z$

2.2.3 Lösung

Es gibt keine Lösung.

2.2.4 Verallgemeinerung

Wir nehmen irgendwelche direkten Arbeitszeiten an und benennen diese einfach mit a_1, a_2, a_3
A1 : a_1 und W1(=50) und W2(=5) und W3(=15) $\longrightarrow$ W3(=70)
A2 : a_2 und W1(=13) und W2(=15) und W3(=9) $\longrightarrow$ W3(=34)
A3 : a_2 und W1(=10) und W2(=8) und W3(=40) $\longrightarrow$ W3(=60)

Das gibt dann das folgende LGS (lineares Gleichungssystem):

$a_1 + 50\,x + 5\,y + 15\,z = 70\,x$
$a_2 + 13\,x + 15\,y + 9\,z = 34\,y$
$a_3 + 10\,x + 8\,y + 40\,z = 60\,z$

2.2.5 Lösung

Es gibt keine Lösung.

2.2.6 Empfindlichkeitsanalyse

Ändert sich im vorigen Beispiel nur eine Warenmenge minimal, gibt es plötzlich eine Lösung:

2.2.6.1 Beispiel

$a_1 + 49,9\ x + 5\ y + 15\ z = 70\ x$
$a_2 + 13\ x + 15\ y + 9\ z = 34\ y$
$a_3 + 10\ x + 8\ y + 40\ z = 60\ z$

Lösung:
$x = \frac{5}{7}(14a_1 + 10a_2 + 15a_3) > 0$
$y = \frac{1}{44}(500a_1 + 360a_2 + 537a_3) > 0$
$z = \frac{1}{308}(2940a_1 + 2108a_2 + 3169a_3) > 0$

2.2.7 Modellanalyse

Die ökonomische Tatsache einer Mißwirtschaft kann durch diese werttheoretische Modellversion nicht abgebildet werden.

2.3 Modellversion M3: Einfache Reproduktion ohne direkte Arbeitszeiten

2.3.1 Modellannahmen

1) Die direkten Arbeitszeiten A1, A2, A3 sind jeweils 0.
Eine bis jetzt in der Realität unrealistische Annahme, bei der statt der Beschäftigten nur Roboter aus den Vorprodukten das Endprodukt herstellen.

2.3.2 Beispiel

Direkten Arbeitszeiten der Beschäftigten A1: 0, A2: 0, A3: 0
Die Mengen der jeweiligen verwendeten Waren werden wie folgt bezeichnet:
a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}

W1($=a_{11}$) und W2($=a_{12}$) und W3($=a_{13}$) $\longrightarrow$ W1($=(a_{11} + a_{21} + a_{31})$)
W1($=a_{21}$) und W2($=a_{22}$) und W3($=a_{23}$) $\longrightarrow$ W2($=(a_{12} + a_{22} + a_{32})$)
W1($=a_{31}$) und W2($=a_{32}$) und W3($=a_{33}$) $\longrightarrow$ W3($=(a_{13} + a_{23} + a_{33})$)

Das gibt dann das folgende LGS (lineares Gleichungssystem):

$a_{11}\ x + a_{12}\ y + a_{13}\ z = (a_{11} + a_{21} + a_{31})\ x$
$a_{21}\ x + a_{22}\ y + a_{23}\ z = (a_{12} + a_{22} + a_{32})\ y$
$a_{31}\ x + a_{32}\ y + a_{33}\ z = (a_{13} + a_{23} + a_{33})\ z$

2.3.3 Lösung

Es gibt unendlich viele positive $(x > 0, y > 0, z > 0)$ Lösungen.
Dies gilt auch für eine beliebige Sektorenanzahl$n > 3$.

2.3.4 Modellanalyse

Da die direkten Arbeitszeiten 0 sind, bildet diese Modellversion die Realität nicht ab.

2.4 Modellversion M4: Einfache Reproduktion

2.4.1 Modellannahmen

Kein Wirtschaftswachstum, aber mit der Fähigkeit sich selbst zu reproduzieren, d.h. die Menge der als Input verwendeten Waren ist gleich der Menge des produzierten Outputs, also keine Mißwirtschaft.

2.4.2 Beispiel

Direkten Arbeitszeiten der Beschäftigten A1: a_1, A2: a_2, A3: a_3
Die Mengen der jeweiligen verwendeten Waren werden wie folgt bezeichnet:
a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}

A1 : a_1 und W1(=a_{11}) und W2(=a_{12}) und W3(=a_{13}) $\longrightarrow$ W1(=($a_{11} + a_{21} + a_{31}$))
A2 : a_2 und W1(=a_{21}) und W2(=a_{22}) und W3(=a_{23}) $\longrightarrow$ W2(=($a_{12} + a_{22} + a_{32}$))
A3 : a_3 und W1(=a_{31}) und W2(=a_{32}) und W3(=a_{33}) $\longrightarrow$ W3(=($a_{13} + a_{23} + a_{33}$))

Das gibt dann das folgende LGS (lineares Gleichungssystem):

$$a_1 + a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z = (a_{11} + a_{21} + a_{31})\,x$$
$$a_2 + a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z = (a_{12} + a_{22} + a_{32})\,y$$
$$a_3 + a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z = (a_{13} + a_{23} + a_{33})\,z$$

2.4.3 Lösung

Es gibt keine Lösung. Dies gilt auch für eine beliebige Sektorenanzahl$n > 3$.

2.4.4 Modellanalyse

Die ökonomische Tatsache einer reinen Reproduktionswirtschaft kann durch diese werttheoretische Modellversion nicht abgebildet werden.

2.5 Modellversion M5: Einfache Reproduktion und Herstellung von Luxusgütern

2.5.1 Modellannahmen

Die Waren W3 sind Luxusgüter. Sie werden deshalb als Vorprodukt zur Herstellung von Waren nicht verwendet!
Nur der Sektor 3 produziert diese Luxusgüter. Diese Modellversion verwendet z.B. Klaus Müller (siehe oben):
`https://www.zeitschrift-marxistische-erneuerung.de/de/article/1252.welche-arbeitszeit-ist-gese`
`html` (steht dort auch als PDF-Version zum Download zur Verfügung).

2.5.2 Beispiel

Direkten Arbeitszeiten der Beschäftigten A1: a_1, A2: a_2, A3: a_3
Die Mengen der jeweiligen verwendeten Waren werden wie folgt bezeichnet:
a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} mit $a_{13} = a_{23} = 0$

A1 und W1(=a_{11}) und W2(=a_{12}) und W3(=0) $\longrightarrow$ W1(=($a_{11} + a_{21} + a_{31}$))
A2 und W1(=a_{21}) und W2(=a_{22}) und W3(=0) $\longrightarrow$ W2(=($a_{12} + a_{22} + a_{32}$))
A3 und W1(=a_{31}) und W2(=a_{32}) und W3(=0) $\longrightarrow$ W3(=a_{33}))

Das gibt dann das folgende LGS (lineares Gleichungssystem):

$a_1 + a_{11}\ x + a_{12}\ y + 0\ z = (a_{11} + a_{21} + a_{31})\ x$
$a_2 + a_{21}\ x + a_{22}\ y + 0\ z = (a_{12} + a_{22} + a_{32})\ y$
$a_3 + a_{31}\ x + a_{32}\ y + 0\ z = a_{33} z$

2.5.3 Lösung

Es gibt genau eine Lösung.
Dies gilt auch für eine beliebige Sektorenanzahl$n > 3$.

2.5.4 Modellanalyse

Die ökonomische Tatsache einer Ökonomie mit Luxusgütern kann durch diese werttheoretische Modellversion abgebildet werden.

2.6 Modellversion M6: Wirtschaftswachstum

2.6.1 Modellannahmen

Wirtschaftswachstum, d.h. die Menge der als Input verwendeten Waren ist kleiner als die Menge des produzierten Outputs.

2.6.2 Beispiel

Direkten Arbeitszeiten der Beschäftigten A1: a_1, A2: a_2, A3: a_3
Die Mengen der jeweiligen verwendeten Waren werden wie folgt bezeichnet:
a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}
Die jeweils erzeugten zusätzlichen Warenmengen (Mehrwerte > 0) werden wie folgt bezeichnet:
m_1, m_2, m_3

A1 und W1(=a_{11}) und W2(=a_{12}) und W3(=a_{13}) $\longrightarrow$ W1(=($a_{11} + a_{21} + a_{31} + m_1$))
A2 und W1(=a_{21}) und W2(=a_{22}) und W3(=a_{23}) $\longrightarrow$ W2(=($a_{12} + a_{22} + a_{32}) + m_2$)
A3 und W1(=a_{31}) und W2(=a_{32}) und W3(=a_{33}) $\longrightarrow$ W3(=($a_{13} + a_{23} + a_{33}$)) $+ m_3$

Das gibt dann das folgende LGS (lineares Gleichungssystem):

$a_1 + a_{11}\ x + a_{12}\ y + a_{13}\ z = (a_{11} + a_{21} + a_{31} + m_1)\ x$
$a_2 + a_{21}\ x + a_{22}\ y + a_{23}\ z = (a_{12} + a_{22} + a_{32} + m_2)\ y$
$a_3 + a_{31}\ x + a_{32}\ y + a_{33}\ z = (a_{13} + a_{23} + a_{33} + m_3)\ z$

2.6.3 Lösung

Es gibt genau eine Lösung.
Dies gilt auch für eine beliebige Sektorenanzahl$n > 3$.

2.6.4 Modellanalyse

Die ökonomische Tatsache einer Ökonomie mit Luxusgütern kann durch diese werttheoretische Modellversion abgebildet werden.

3 Ergebnis (Zusammenfassung)

3.0.1 Beurteilung der Modellversionen

Die verschiedenen Versionen des Basismodells können abbilden:
1) eine Ökonomie mit einfacher Reproduktion mit Luxusgüter.
2) eine Ökonomie mit Wirtschaftswachstum.

Die Modellversionen können nicht abbilden:
3) eine Ökonomie der Mißwirtschaft.
4) eine Ökonomie mit einfacher Reproduktion ohne Luxusgüter.
(„neue Ökonomie der sozial-ökologischen einfachen Reproduktion“)

3.0.2 Offenes Problem

P1) Wie müssen 3) und 4) verändert werden, damit die ökonomische Realität angemessen modelliert wird?
P2) Muss evtl. das Basismodell komplett verändert werden?

4 Mathematischer Anhang - nur für Interessierte

4.1 Sätze über LGS (Lineare Gleichungssysteme)

4.1.1 Lösbarkeit von n x n LGS

siehe: `https://de.wikipedia.org/wiki/Lineares_Gleichungssystem`
Über die Lösbarkeit einer n x n LGS (Anzahl der Gleichungen ist gleich Anzahl der Unbekannten) gibt die Determinante der zugehörigen Matrix Auskunft.
Das Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn der Wert der Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich null ist.
Ist der Wert jedoch gleich null, hängt die Lösbarkeit von den Werten der Nebendeterminanten ab.
Nur wenn alle Nebendeterminanten den Wert null haben, hat das System unendlich viele Lösungen, ansonsten ist das Gleichungssystem unlösbar.

4.1.2 Lemma 0

1) In der folgenden Matritx

$$A = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

sind alle Koeffizienten $a_{ij} > 0$ und alle $a_i > 0$ und alle Spaltensummen von A gleich 0 (d.h. $|A| = 0$).
Dann hat die folgende Gleichung (die zugehörige Matrix wird mit B bezeichnet), wobei alle $d_i > 0$

$$\begin{pmatrix} -a_{11} - d_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} - d_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33} - d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

genau eine positive (d.h. alle $x_i > 0$) Lösung.

2) Die Behauptung läßt sich auch für ein entsprechendes n x n LGS ($n \geq 3$) verallgemeinern.

1. Beweis:
Umformen der Gleichung ergibt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} + d_1 & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & a_{22} + d_2 & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{33} + d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

mit

$$-A = \begin{pmatrix} a_{11} + d_1 & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & a_{22} + d_2 & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{33} + d_3 \end{pmatrix}$$

Setze im Folgenden: B := -A

B1)
Unterbehauptung: alle Eigenwerte von -A haben einen positiven Realteil.
Unterbeweis.
Abschätzung über Gerschgorin-Kreise K_i: (jeweils Kreisscheibe um ein Diagonalelement):
Die Menge aller Eigenwerte von B ist die Menge aller Eigenwerte der transponierten Matrix B^T Deswegen genügt es im Folgenden den Satz über die Gerschgorin-Kreise auf Spalten zu beziehen.
Wegen Spaltensummen=0 gilt:
$a_{11} - a_{21} - a_{31} = 0$, also:
$a_{11} + d_1 = a_{21} + a_{31} + d_1$ also:
$K_i(a_{11} + d_1, |-a_{21}| + |-a_{31}|) = K_i(a_{11} + d_1, a_{21} + a_{31}) = K_i(a_{21} + a_{31} + d_1, a_{21} + a_{31})$
Die Realteile aller komplexen Zahlen in den Kreisscheiben sind alle > 0
Analoges gilt für die anderen Kreisscheiben K_i.
Da jeder Eigenvektor in der Vereinigung aller Kreisscheiben $K_i$liegt, haben alle Eigenvektoren positive Realteile.

B2)
Definition:
Eine M-Matrix B ist eine Matrix deren Einträge außerhalb der Hauptdiagonale kleiner oder gleich 0 sind und deren Eigenwerte einen Realteil größer 0 besitzen.
Es gilt:
Eine M-Matrix B ist regulär und $B^{-1} \geq 0$. (Dabei ist ≥ 0 komponentenweise zu verstehen.)
Setze $B := A^{-1}$
Da B regulär muss gelten: $|B| = 0$ und deshalb hat
$Bx = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ genau eine Lösung.
Da
$x = B^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
und alle B elementweise ≥ 0 und alle $a_i > 0$ muss x positiv sein.
Da alle $a_i > 0$ und in B jede Zeile mindestens einen Eintrag ungleich 0 enthält (sonst wären die Zeilen nicht linear unabhängig), muss x sogar > 0 sein.

siehe auch Matheplanet:
`https://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/printtopic.php?topic=265879&load_mathjax=1`

2. Beweis:
Teil1: Eindeutigkeit:

$$D := \begin{pmatrix} -a_{11} - d_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} - d_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33} - d_3 \end{pmatrix},$$

Dann ist die transponierte Matrix D^* strikt diagonaldominant und deshalb regulär.
`https://de.wikipedia.org/wiki/Diagonaldominante_Matrix#Anwendungen`
Also ist auch D regulär. Da D regulär muss gelten: $|D| \neq 0$ und deshalb hat
$Dx = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$ genau eine Lösung.

Teil2: positive Lösung:

1) Matrixgleichung als LGS:

$$\begin{array}{lllllll} (-a_{11}-d_1)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = -a_1 \\ a_{21}x_1 & + & (-a_{22}-d_2)x_2 & + & a_{23}x_3 & = -a_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & (-a_{33}-d_3)x_3 & = -a_3 \end{array}$$

2) Addiere alle Terme links bzw. rechts der Gleichheitszeichen. Das ergibt:
$-d_1x_1 - d_2x_2 - d_3x_3 = -a_1 - a_2 - a_3$
Daraus folgt, dass mindestens ein $x_i > 0$. O.B.d.A sei $x_1 > 0$
3) Addiere alle Terme links bzw. rechts der Gleichheitszeichen unter der 1. Gleichung. Das ergibt:
$a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - d_2x_2 - a_{13}x_3 - d_3x_3 = -a_2 - a_3$
Daraus folgt, dass mindestens ein $x_i > 0$ für $i \geq 2$. O.B.d.A sei $x_2 > 0$
4) Addiere alle Terme links bzw. rechts der Gleichheitszeichen unter der 2. Gleichung. Das ergibt:
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (-a_{33} - d_3)x_3 = -a_3$
Daraus folgt, dass $x_3 > 0$
5) Damit sind alle $x_i > 0$.

4.1.3 Lemma 1

Im folgenden LGS

$-a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n = -a_1$
...
$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + -a_{nn}x_n = -a_n$

sind alle Koeffizienten $a_{ij} > 0$ und alle $a_i > 0$ und $|A| = 0$
(d.h. alle Koeffizienten in der Hauptdiagonale sind negativ, sonst alle positiv)

Dann hat dieses LGS keine positive Lösung, d.h. es gilt: nicht alle $x_i > 0$

Beweis:
Das LGS in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & -a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ ... \\ -a_n \end{pmatrix}$$

Seien gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

A mit negativer Hauptdiagonale und ansonsten positiven Matrixelementen und

$a = \begin{pmatrix} -a_1 \\ ... \\ -a_n \end{pmatrix}$ wobei alle a_i positiv sind.

Annahme:

Es gibt eine positive (d.h. alle $l_i > 0$) Lösung $l = \begin{pmatrix} l_1 \\ ... \\ l_n \end{pmatrix}$

Dann gilt: $A \cdot l = a$
oder als LGS:
$-a_{11}\, l_1 + a_{12}\, l_2 + ...a_{1n}\, l_n = -a_1$
...
$a_{n1}\, l_1 + a_{n2}\, l_2 + ... - a_{nn}\, l_n = -a_n$
oder umgeformt:
$a_{11}\, l_1 = a_{12}\, l_2 + ... + a_{1n}\, l_n + a_1$
...
$a_{nn}\, l_n = a_{n1}\, l_1 + ... + a_{n,n-1}\, l_{n-1} + a_n$
also:
$|a_{11}\, l_1| = |a_{12}\, l_2| + ... + |a_{1n}\, l_n| + |a_1| > |a_{12}\, l_2| + ... + |a_{1n}\, l_n|$
...
$|a_{nn}\, l_n| = |a_{n1}\, l_1| + ... + |a_{n,n-1}\, l_{n-1}| + |a_n| > |a_{n1}\, l_1| + ... + |a_{n,n-1}\, l_{n-1}|$
also:
$|-a_{11}\, l_1| > |a_{12}\, l_2| + ... + |a_{1n}\, l_n|$
...
$|-a_{nn}\, l_n| > |a_{n1}\, l_1| + ... + |a_{n,n-1}\, l_{n-1}|$
Betrachte die Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} -a_{11}\, l_1 & a_{12}\, l_2 & ... & a_{1n}\, l_n \\ ... & & & \\ a_{n1}\, l_1 & a_{n2}\, l_2 & ... & -a_{nn}\, l_n \end{pmatrix}$$

Diese Matrix M muss dann streng diagonaldominant sein.
Da jede streng diagonaldominante Matrix regulär ist, gilt:
$|M| \neq 0$
Es gilt außerdem:
$|M| = l_1 \cdot ... \cdot l_n\; |A| \neq 0$
Da nach Voraussetzung alle $l_i > 0$, muss $|A| \neq 0$ sein.
Im Widerspruch zur Voraussetzung.

Begründung: jede streng diagonaldominante Matrix ist regulär:
`https://de.wikipedia.org/wiki/Diagonaldominante_Matrix`

4.1.4 Lemma 2

1) In der folgenden Gleichung sind alle $a_{ij} > 0$ und außerdem sind jeweils alle Spaltensummen der Matrix gleich 0. Dann hat

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

unendlich viele positive (alle $x_i > 0$) Lösungen.

2) Die Behauptung läßt sich auch für ein entsprechendes n x n LGS ($n \geq 3$) verallgemeinern.

Beweis:
I)
Definitionen:
Eine stochastische Matrix ist eine quadratische Matrix, deren Zeilen- oder Spaltensummen Eins betragen und deren Elemente zwischen Null und Eins liegen.
Eine stochastische Matrix heißt zeilenstochastisch, wenn alle Einträge der Matrix zwischen 0 und 1 liegen und die Zeilensummen jeweils 1 ergeben.
Eine stochastische Matrix heißt spaltenstochastisch, wenn alle Einträge der Matrix zwischen 0 und 1 liegen und die Spaltensummen jeweils 1 ergeben.

II)
Unterbehauptung:
Es existiert eine Konstante k mit M = (E+kA) und M ist spaltenstochastisch.
Beweis:
$m := |max\{a_{ij} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}|$
$k := \frac{1}{m}$
Dann gilt:
$0 \leq a_{ii} \leq m \implies 0 \geq -a_{ii} \geq -m \implies 0 \geq \frac{-a_{ii}}{m} \geq -1 \implies 1 \geq 1 + \frac{-a_{ii}}{m} \geq 0 \implies 1 \geq 1 + k \cdot -a_{ii} \geq 0$
und für $i \neq j$:
$0 \leq k \cdot a_{ij} \leq 1$

III)
Definition:
Der Spektralradius r(A) ist der Eigenwert mit dem größten Betrag (Betrag bzgl. einer komplexen Zahl).

Satz von Perron-Frobenius:
Für positive (bzgl aller Einträge) Matrizen $A > 0$ ist der Spektralradius r(A) von A ein positiver Eigenwert von A, zu dem ein positiver Eigenvektor $x > 0$ (jeder Eintrag in x ist > 0) existiert mit Ax=r(A) x.

Lemma:
Der Spektralradius einer Matrix ist immer höchstens so groß wie ihre Spaltensummernorm = Maximum über alle Betragssummen jeder Spalte.

Daraus folgt dann:

Lemma:
Der Spektralradius r(B) einer spaltenstochastischen Matrix B ist höchstens 1.

Lemma:
Der Spektralradius r(B) einer spaltenstochastischen Matrix B ist 1.

Beweis:
$\vec{1}$ sei der Vektor, der nur als Einträge Einsen hat. Dann gilt für die transponierte Matrix B^*: $B^*\vec{1} = \vec{1}$
Also hat B^* den Eigenwert 1, also hat auch die transponierte Matrix $B^{**} = B$ den Eigenwert 1.

IV)
Da es nach dem vorigen Lemma für M keinen größeren Eigenwert als 1 geben kann, muss 1 der größte Eigenwert sein, also ist der Spektralradius r(M) = 1.
Nach dem Satz von Perron-Frobenius folgt dass es einen positiven Vektor $x > 0$ geben muss muss mit Mx=x.

V)
Mx=x, also (E +kA) x = x $\Longrightarrow$ Ex +kAx = x $\Longrightarrow$ x +kAx = x $\Longrightarrow$ kAx = 0. Da $k \neq 0$ folgt:
$Ax = 0$
Da $Ax = 0$, folgt für alle $\lambda > 0$ $A(\lambda x) = 0$.
Also gibt es unendlich viele positive Lösungen.

4.1.5 Satz 1

1) Das folgende 4 x 4 LGS bei dem alle Keoffizienten $a_1, a_2, a_3, a_4, a_{11}, a_{12}, ..., a_{44} > 0$ sind
hat keine Lösung:

$$
\begin{aligned}
&a_1 + a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 + a_{14}\ x_4 = (a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41})\ x_1 \\
&a_2 + a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 + a_{24}\ x_4 = (a_{12} + a_{22} + a_{32} + a_{42})\ x_2 \\
&a_3 + a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 + a_{34}\ x_4 = (a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{43})\ x_3 \\
&a_4 + a_{41}\ x_1 + a_{42}\ x_2 + a_{43}\ x_3 + a_{44}\ x_4 = (a_{14} + a_{24} + a_{34} + a_{44})\ x_4
\end{aligned}
$$

2) Die Behauptung läßt sich auch für ein entsprechendes n x n LGS ($n \geq 3$) verallgemeinern.

I) Einfacher Beweis
Addiert man alle linke Seiten linkes des Gleichheitszeichens des LGS und setzt diese allen rechten Seiten rechts des Gleichheitszeichens gleich, bekommt man Folgendes:
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ + Rest = Rest
Subtrahiert man den Rest auf jeder Seite, bekommt man:
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$
d.h. Es gibt keine Lösung.

Komplizierter Beweis: (zeigt aber nur keine positive Lösung)
Das LGS in Matrixform:

$$
\begin{pmatrix}
-a_{21} - a_{31} - a_{41} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & -a_{12} - a_{32} - a_{42} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & -a_{13} - a_{23} - a_{43} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & -a_{14} - a_{24} - a_{34}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \\ -a_4 \end{pmatrix}
$$

Die zugehörige Matrix A hat immer die Spaltensumme 0. Also sind die Zeilen linear abhängig.
Also gilt $|A| = 0$
Damit gibt es entweder unendlich viele oder gar keine Lüsung.
Nach Lemma 1 gibt es keine positive Lösung.

4.1.6 Satz 2

1) Das folgende 4 x 4 LGS bei dem alle Keoffizienten $a_1, a_2, a_3, a_4, m_1, m_2, m_3, m_4, a_{11}, a_{12}, ..., a_{44} > 0$ sind
hat keine positive Lösung:

$$
\begin{aligned}
&a_1 + a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 + a_{14}\ x_4 = (a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41} + m_1)\ x_1 \\
&a_2 + a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 + a_{24}\ x_4 = (a_{12} + a_{22} + a_{32} + a_{42} + m_2)\ x_2 \\
&a_3 + a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 + a_{34}\ x_4 = (a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{43} + m_3)\ x_3 \\
&a_4 + a_{41}\ x_1 + a_{42}\ x_2 + a_{43}\ x_3 + a_{44}\ x_4 = (a_{14} + a_{24} + a_{34} + a_{44} + m_4)\ x_4
\end{aligned}
$$

2) Die Behauptung läßt sich auch für ein entsprechendes n x n LGS ($n \geq 3$) verallgemeinern.

Beweis:
Das LGS in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} -a_{21}-a_{31}-a_{41}-m_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & -a_{12}-a_{32}-a_{42}-m_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{13}-a_{23}-a_{43}-m_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & -a_{14}-a_{24}-a_{34}-m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \\ -a_4 \end{pmatrix}$$

Nach Lemma 0 gibt es keine positive Lösung.

4.1.7 Satz 3

1) Das folgende 4 x 4 LGS bei dem alle Koeffizienten $a_{ij} > 0$ und alle a_i >0 sind
hat genau eine positive Lösung (d.h. alle $x_i > 0$):

$$a_1 + a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + 0\, x_4 = (a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41})\, x_1$$
$$a_2 + a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + 0\, x_4 = (a_{12} + a_{22} + a_{32} + a_{42})\, x_2$$
$$a_3 + a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + 0\, x_4 = (a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{43}) x_3$$
$$a_4 + a_{41}\, x_1 + a_{42}\, x_2 + a_{43}\, x_3 + 0\, x_4 = a_{44}\, x_4$$

2) Die Behauptung läßt sich auch für ein entsprechendes n x n LGS ($n \geq 3$) verallgemeinern.

Bemerkung:
Die Spaltensummen der dazuhehörigen Matrix (siehe Beweis) sind (bis auf die letzte Spalte) immer = 0

Beweis:
Das LGS in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} -a_{21}-a_{31}-a_{41} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & -a_{12}-a_{32}-a_{42} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & -a_{13}-a_{23}-a_{43} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & -a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \\ -a_4 \end{pmatrix}$$

1)
Das LGS ist lösbar gdw:

$$\begin{pmatrix} -a_{21}-a_{31}-a_{41} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{12}-a_{32}-a_{42} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{13}-a_{23}-a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$
$$a_{41}\, x_1 + a_{42}\, x_2 + a_{43}\, x_3 = a_{44}\, x_4$$

Nach Lemma 0 folgt: $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$, also muss auch $x_4 > 0$ sein.

2) Dieser Teil ist unnötig.
M sei die Untermatrix, die durch Streichen der jeweils letzten Zeile und Spalte der obigen Matrix von A erzeugt wird, also:

$$M = \begin{pmatrix} -a_{21} - a_{31} - a_{41} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{12} - a_{32} - a_{42} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{13} - a_{23} - a_{43} \end{pmatrix}$$

Es gilt dann:
$|A| = -a_{44} \cdot |M|$ und außerdem sowieso: $|M| = |M^*|$, also:
$|A| = -a_{44} \cdot |M^*|$
Die transponierte Matrix M^* von M ist streng diagonaldominant und deshalb regulär. Also gilt:
$|M^*| \neq 0$
Da $a_{44} > 0$ folgt:
$|A| = -a_{44} * |M| \neq 0$

4.1.8 Satz 4

1) Das folgende 3 x 3 LGS bei dem alle Koeffizienten $a_{ij} > 0$ sind hat unendlich viele positive (d.h. alle $x_i > 0$) Lösungen.

$a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 = (a_{11} + a_{21} + a_{31})\ x_1$
$a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 = (a_{12} + a_{22} + a_{32})\ x_2$
$a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 = (a_{13} + a_{23} + a_{33})\ x_3$

2) Die Behauptung läßt sich auch für ein entsprechendes n x n LGS ($n \geq 3$) verallgemeinern.

Beweis:
Das LGS mit Matrixdarstellung:

$$\begin{pmatrix} -a_{21} - a_{31} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{12} - a_{32} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{13} - a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da jeweils alle Spaltensummen der Matrix 0 sind und alle $a_{ij} > 0$ gibt es nach Lemma 2 unendlich viele positive Lösungen.

4.2 Beispiele

4.2.1 Beispiel 1 aus M1

$50\,x + 5\,y + 15\,z = 70\,x$
$13\,x + 15\,y + 9\,z = 34\,y$
$10\,x + 8\,y + 40\,z = 60\,z$

ergibt umgeformt:

$-20\,x + 5\,y + 15\,z = 0\,x$
$13\,x - 19\,y + 9\,z = 0\,y$
$10\,x + 8\,y - 20\,z = 0\,z$

und hat die zugehörige Koeffizientenmatrix bzw. Determinante:

$\begin{vmatrix} -20 & 5 & 15 \\ 13 & -19 & 9 \\ 10 & 8 & -20 \end{vmatrix} = 0$ (kann man mir Wolfram Alpha im Internet) berechnen lassen:

Es gibt unendlich viele positive $(x > 0, y > 0, z > 0)$ Lösungen.
Zum Beispiel:
$x_1 = 22, y_1 = 25, z_1 = 21$
$x_2 = 44, y_2 = 50, z_2 = 42$
allgemein: $y = \frac{25}{22}x$ und $z = \frac{21}{22}x$

4.2.1.1 Beispiel 2 aus M1

$50\,x + 5\,y + 15,01\,z = 70\,x$
$13\,x + 15\,y + 9\,z = 34\,y$
$10\,x + 8\,y + 40\,z = 60\,z$

ergibt umgeformt:

$-20\,x + 5\,y + 15,01\,z = 0\,x$
$13\,x - 19\,y + 9\,z = 0\,y$
$10\,x + 8\,y - 20\,z = 0\,z$

und hat die zugehörige Koeffizientenmatrix bzw. Determinante:

$\begin{vmatrix} -20 & 5 & 15,01 \\ 13 & -19 & 9 \\ 10 & 8 & -20 \end{vmatrix} = 2,94 \neq 0$ (kann man mir Wolfram Alpha im Internet) berechnen lassen)

4.2.2 Beispiel 1 aus M2

$123 + 50\,x + 5\,y + 15\,z = 70\,x$
$456 + 13\,x + 15\,y + 9\,z = 34\,y$
$789 + 10\,x + 8\,y + 40\,z = 60\,z$

und hat die zugehörige Koeffizientenmatrix bzw. Determinante:

$$\begin{vmatrix} -20 & 5 & 15 \\ 13 & -19 & 9 \\ 10 & 8 & -20 \end{vmatrix} = 0$$

Die Nebendeterminanten sind allerdings alle ungleich 0:

$$\begin{vmatrix} 123 & 5 & 15 \\ 456 & -19 & 9 \\ 789 & 8 & -20 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} -20 & 123 & 15 \\ 13 & 456 & 9 \\ 10 & 789 & -20 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} -20 & 5 & 123 \\ 13 & -19 & 456 \\ 10 & 8 & 789 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ergbnis:
Es gibt keine Lösung.

4.2.3 Beispiel 2 aus M2

$a_1 + 50\ x + 5\ y + 15\ z = 70\ x$
$a_2 + 13\ x + 15\ y + 9\ z = 34\ y$
$a_3 + 10\ x + 8\ y + 40\ z = 60\ z$

hat (siehe oben) die zugehörige Koeffizientenmatrix mit Determinante = 0:

$$\begin{pmatrix} -20 & 5 & 15 \\ 13 & -19 & 9 \\ 10 & 8 & -20 \end{pmatrix}$$

Die Nebendeterminanten sind:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 5 & 15 \\ a_2 & -19 & 9 \\ a_3 & 8 & -20 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} -20 & a_1 & 15 \\ 13 & a_2 & 9 \\ 10 & a_3 & -20 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} -20 & 5 & a_1 \\ 13 & -19 & a_2 \\ 10 & 8 & a_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ergebnis:
Wenn zwischen a_1, a_2, a_3 folgende Beziehung herrscht, gibt es unendlich viele Lösungen, aber diese sind nicht ökonomisch sinnvoll (negativen Wert für a_3).
$a_3 = -\frac{14}{15}a_1 - \frac{2}{3}a_2$
$y = -\frac{3}{110}a_1 + \frac{1}{22}a_2 + \frac{25}{22}x$
$a_3 = -\frac{19}{330}a_1 - \frac{1}{66}a_2 + \frac{21}{22}$ x

4.2.3.1 Beispiel 3 aus M2

$a_1 + 49,9\ x + 5\ y + 15\ z = 70\ x$
$a_2 + 13\ x + 15\ y + 9\ z = 34\ y$
$a_3 + 10\ x + 8\ y + 40\ z = 60\ z$

hat die Determinante = 0 und deshalb genau eine Lösung:

$x = \frac{5}{7}(14a_1 + 10a_2 + 15a_3) > 0$
$y = \frac{1}{44}(500a_1 + 360a_2 + 537a_3) > 0$
$z = \frac{1}{308}(2940a_1 + 2108a_2 + 3169a_3) > 0$

4.2.4 Beispiel 1 aus M3

Das folgende LGS (lineares Gleichungssystem):

$$
\begin{aligned}
a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z &= (a_{11} + a_{21} + a_{31})\,x \\
a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z &= (a_{12} + a_{22} + a_{32})\,y \\
a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z &= (a_{13} + a_{23} + a_{33})\,z
\end{aligned}
$$

Nach Satz 4 existieren unendlich viele positive Lösungen.

4.2.5 Beispiel 1 aus M4

Das gibt dann das folgende LGS (lineares Gleichungssystem):

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z &= (a_{11} + a_{21} + a_{31})\,x \\
a_2 + a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z &= (a_{12} + a_{22} + a_{32})\,y \\
a_3 + a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z &= (a_{13} + a_{23} + a_{33})\,z
\end{aligned}
$$

und hat die zugehörige Koeffizientenmatrix bzw. Determinante:

$$
\begin{vmatrix}
-a_{21} - a_{31} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & -a_{12} - a_{32} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & -a_{33}
\end{vmatrix} = 0
$$

da die Spaltensummen jeweils 0 sind.
Nach Satz 1 existiert keine Lösung.

4.2.6 Beispiel 1 aus M5

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_{11}\,x + a_{12}\,y + 0\,z &= (a_{11} + a_{21} + a_{31})\,x \\
a_2 + a_{21}\,x + a_{22}\,y + 0\,z &= (a_{12} + a_{22} + a_{32})\,y \\
a_3 + a_{31}\,x + a_{32}\,y + \;0z &= a_{33}\,z
\end{aligned}
$$

und hat die zugehörige Koeffizientenmatrix bzw. Determinante:

$$
\begin{vmatrix}
-a_{21} - a_{31} & a_{12} & 0 \\
a_{21} & -a_{12} - a_{32} & 0 \\
a_{31} & a_{32} & -a_{13} - a_{23}
\end{vmatrix} = -a_{33}(a_{12}\,a_{31} + a_{21}\,a_{32} + a_{31}\,a_{32}) \neq 0
$$

Nach Satz 3 existiert genau eine positive Lösung:

$$
x = \frac{a_{12}(a_1+a_2)+a_{32}a_1}{a_{12}a_{31}+a_{32}(a_{21}+a_{31})} \qquad y = \frac{a_{21}(a_1+a_2)+a_{31}a_2}{a_{12}a_{31}+a_{32}(a_{21}+a_{31})} \qquad z = \frac{a_1+a_2+a_3}{a_{33}}
$$

4.2.7 Beispiel 1 aus M6

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z &= (a_{11} + a_{21} + a_{31} + m_1)\,x \\
a_2 + a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z &= (a_{12} + a_{22} + a_{32} + m_2)\,y \\
a_3 + a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z &= (a_{13} + a_{23} + a_{33} + m_3)\,z
\end{aligned}
$$

und hat die zugehörige Koeffizientenmatrix bzw. Determinante:

$$\begin{vmatrix} -a_{21}-a_{31}-m_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{12}-a_{32}-m_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{13}-a_{23}-m_3 \end{vmatrix}$$

Nach Satz 2 existiert genau eine positive Lösung.